Cours : Introduction aux éléments finis discontinus

Table des matières

Quelques références

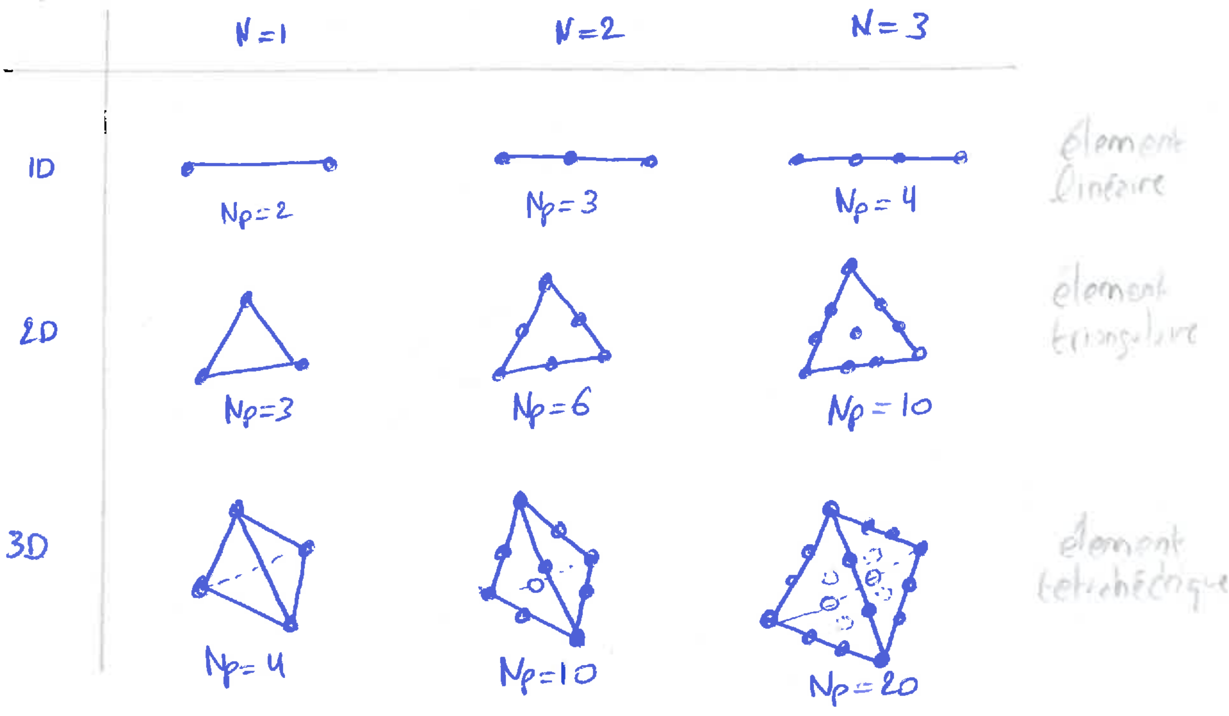
- J. S. Hesthaven, T. Warburton (2008). *Nodal Discontinuous Galerkin Methods: Algorithms, Analysis and Applications*, publié par *Springer*
- Le début des articles :
  - ⋆ A. Modave, A. St-Cyr, W. A. Mulder, T. Warburton (2015). *A nodal discontinuous Galerkin method for reverse-time migration on GPU clusters*, publié dans *Geophysical Journal International*, 203 (2), 1419-1435
    https://arxiv.org/pdf/1506.00907.pdf (preprint)
  - ⋆ A. Modave, A. St-Cyr et T. Warburton (2016). *GPU performance analysis of a nodal discontinuous Galerkin method for acoustic and elastic models*, publié dans *Computers & Geophysics*, 91, 64-76
    https://arxiv.org/pdf/1602.07997.pdf (preprint)

Représentation de la sol. approx. avec | EF continus / EF discontinus

On considère un maillage du domaine

$$\underbrace{\Omega}_{\text{domaine}} = \bigcup_{k=1}^{K} \underbrace{D^k}_{k^{\text{ième}} \text{ maille}} \qquad \text{avec} \quad \begin{array}{ll} D^k \cup D^\ell = \phi & \forall k \neq \ell \\ D^k \neq \phi & \forall k \end{array}$$

Sur chaque maille, la sol. est approx. par un polynome d'ordre max. N.
Pour représenter la sol., on choisit un ensemble de noeuds $\{\xi_j^k\}_{j=1}^{N_p}$.



* **Notation**

		1D	2D	3D
Nombre de faces	N_{faces}	2	3	4
Nombre de "vertex"	N_v	2	3	4
Nombre de "vertex" par face	N_{fv}	1	2	3
Nombre de noeuds	N_p	$N+1$	$(N+1)(N+2)/2$	$(N+1)(N+2)(N+3)/6$
Nombre de noeuds par face	N_{fp}	1	$N+1$	$(N+1)(N+2)/2$

* Représentation locale

Sur chaque maille D^k, la sol. approx. est développée sur une base composée de polynomes de Lagrange $\{\ell_j^k\}_{j=1\dots N_p}$

Nombre de noeuds dans un elem.

fonct° de base locale

$$\underbrace{p(\underline{x},t)\big|_{D^k}}_{\text{sol. exacte sur } D^k} \approx \underbrace{p^k(\underline{x},t)}_{\text{sol. approx sur } D^k} = \sum_{j=1}^{N_p} p_j^k(t)\, \boxed{\ell_j^k(\underline{x})}$$

Val. de la sol. approx. au noeud $\underline{\xi}_j^k$

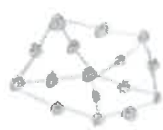
Poly. de Lagrange assoc. au noeud $\underline{\xi}_j^k$

propriétés : $\ell_j^k(\underline{\xi}_i^k) = \delta_{ij}$

$p^k(\underline{\xi}_i^k, t) = p_i^k(t)$

$$\boxed{\ell_j^k(\underline{x}) = \prod_{i \neq j} \frac{\underline{x} - \underline{\xi}_i^k}{\underline{\xi}_j^k - \underline{\xi}_i^k}}$$

* Représentation globale



La sol. approx. a une seule val. sur chaque noeud d'interf. !

CAS CONTINU

On impose la continuité de la sol. approx.
On peut rep. la sol. approx. avec des fonctions de base globales continues.

nombre. de noeuds (NODES) dans tout le maillage.

fonct° de base globale

$$p(\underline{x},t) \approx P_h(\underline{x},t) = \sum_{j=1}^{N_{dof}} P_j(t)\, \boxed{L_j(\underline{x})}$$

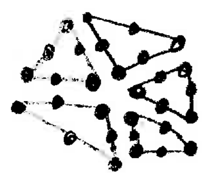
$$V_h = \{ v_h \in C^0(\Omega),\ v_h|_{D^k} \in P^N(D^k),\ 1 \leq k \leq K \}$$

CAS DISCONTINU

Pas de continuité de la sol. approx. aux interfaces.
Elle peut avoir des val. $\neq$ de part et d'autre de chaque interf.

$$p(\underline{x},t) \approx P_h(\underline{x},t) = \bigoplus_{k=1}^{K} p^k(\underline{x},t)$$

$$V_h = \bigoplus_{k=1}^{K} P^N(D^k)$$



La sol approx. a plusieurs valeurs sur chaque noeud d'interface

Une méthode EF continue

* **problème d'ondes**

Trouver $p(\underline{x},t) \in C^1(H^1(\Omega), [0,T])$ t.q.

$$\left|\begin{array}{lll} \partial_{tt} p - \nabla\cdot(\mu \nabla p) = 0 & \underline{x} \in \Omega, t \in [0,T] & \text{eqn ondes} \\ \partial_n p |_{\partial\Omega} = 0 & \underline{x} \in \partial\Omega, t \in [0,T] & \text{conditions aux limites de Neumann} \\ p(\underline{x},0) = p_0(\underline{x}) & \left.\right\} \underline{x} \in \Omega & \text{conditions initiales (C.I.)} \\ \partial_t p |_{(\underline{x},0)} = p_1(\underline{x}) & & \end{array}\right.$$

* **forme variationnelle approx.**

Trouver $p_h(\underline{x},t) \in C^1(V_h, [0,T])$ t.q.

$$d_{tt}\left(\int_\Omega p_h(\underline{x},t)\, q_h(\underline{x})\, d\underline{x} \right) + \int_\Omega \mu\, \nabla p_h(\underline{x},t) \cdot \nabla q_h(\underline{x})\, d\underline{x} = 0, \quad \forall q_h(\underline{x}) \in V_h, t \in [0,T]$$

avec
$$\left| \begin{array}{l} p_h(\underline{x},0) = p_{h,0}(\underline{x}) \\ d_t p_h |_{(\underline{x},0)} = p_{h,1}(\underline{x}) \end{array}\right.$$

* **schéma semi-discret**

On utilise
- La représentation $p_h(\underline{x},t) = \sum_{J=1}^{N_{dof}} p_J(t)\, L_J(\underline{x})$
- Les fonctions-test $\{L_I\}_{I=1}^{N_{dof}}$

On a :

$$\sum_J \underbrace{\boxed{\left(\int_\Omega L_J L_I\, d\underline{x}\right)}}_{(\mathbb{M})_{IJ}} d_{tt} p_J + \sum_J \underbrace{\boxed{\int_\Omega \mu\, \nabla L_J \cdot \nabla L_I\, d\underline{x}}}_{(\mathbb{K}^\mu)_{IJ}} p_J = 0$$

pour $I = 1 \dots N_{dof}$, $t \in [0,T]$

$$\Rightarrow \boxed{\mathbb{M}\, d_{tt}[p_J] + \mathbb{K}^\mu [p_J] = 0}$$

$\mathbb{M}$ → matrice de masse

$\mathbb{K}^\mu$ → matrice de raideur

$[p_J]$ → tableau avec toutes les inconnues discrètes

Une méthode EF discontinue

* **problème d'ondes**

$$\begin{cases} \partial_t p + \rho c^2 \nabla\cdot \underline{u} = 0 \\ \rho\, \partial_t \underline{u} + \nabla p = 0 \end{cases} \qquad \underline{x}\in\Omega,\ t\in[0,T] \qquad \text{syst. ondes}$$

$$\underline{n}\cdot\underline{u}\big|_{\partial\Omega} = 0 \qquad \underline{x}\in\partial\Omega,\ t\in[0,T] \qquad \text{C.L.}$$

$$\begin{cases} p(\underline{x},0) = p_0(\underline{x}) \\ \underline{u}(\underline{x},0) = \underline{u}_0(\underline{x}) \end{cases} \qquad \underline{x}\in\Omega \qquad \text{C.I.}$$

* **sol. approx.** (LOCALE)

$$p(\underline{x},t)\big|_{D^k} \approx p^k(\underline{x},t) = \sum_{j=1}^{N_p} p_j^k(t)\, \ell_j^k(\underline{x})$$

$$\underline{u}(\underline{x},t)\big|_{D^k} \approx \underline{u}^k(\underline{x},t) = \sum_{j=1}^{N_p} \underline{u}_j^k(t)\, \ell_j^k(\underline{x}) \qquad \begin{matrix} x\in D^k \\ t\in[0,T] \end{matrix}$$

* **forme variationnelle approx.** (LOCALE)

Trouver $p^k(\underline{x},t) \in C^1(P^N(D^k);[0,T])$
$\underline{u}^k(\underline{x},t) \in C^1((P^N(D^k))^3;[0,T])$, $\forall D^k$, t.q.

$$\int_{D^k} (\partial_t p^k + \rho c^2 \nabla\cdot\underline{u}^k)\, \psi(\underline{x})\, d\underline{x} + \int_{\partial D^k} \boxed{S_p(\underline{x},t)}\, \psi(\underline{x})\, d\underline{x} = 0 \qquad \forall \psi(\underline{x}) \in P^N(D^k),\ t\in[0,T]$$

$$\int_{D^k} (\rho\, \partial_t \underline{u}^k + \nabla p^k)\cdot \underline{\phi}(\underline{x})\, d\underline{x} + \int_{\partial D^k} \boxed{\underline{S}_u(\underline{x},t)}\cdot \underline{\phi}(\underline{x})\, d\underline{x} = 0 \qquad \forall \underline{\phi}(\underline{x}) \in (P^N(D^k))^3,\ t\in[0,T]$$

Le couplage entre les éléments se fait grâce aux termes de pénalité $S_p(\underline{x},t)$ et $\underline{S}_u(\underline{x},t)$ qui dép. de la solution de part et d'autre de l'interface.

Notation pour écrire les termes de pénalité :

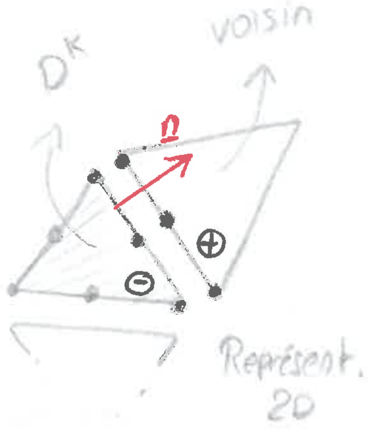
$\underline{n}$ normale unitaire ext. à D^k sur ∂D^k

$p^{\ominus}\,\underline{u}^{\ominus}$ val. des champs "intérieurs" (càd correspondant à D^k)

$p^{\oplus}\,\underline{u}^{\oplus}$ val. des champs "extérieurs" (càd corresp. au voisin)

$[\![p]\!] = p^{\oplus} - p^{\ominus}$ saut

$\{\!\{p\}\!\} = (p^{\oplus}+p^{\ominus})/2$ moyenne



(on utilise des pénalités différentes aux frontières du domaine (PAS DE VOISIN !))

Choix classique :

$$S_p = \frac{c^{\ominus}}{\{\!\{1/(\rho c)\}\!\}}\left(\underline{n}\cdot[\![\underline{u}]\!] - \frac{1}{\rho^{\oplus}c^{\oplus}}[\![p]\!]\right)\frac{1}{2}$$

$$\underline{S}_u = \frac{\rho^{\ominus}c^{\ominus}}{\{\!\{\rho c\}\!\}}\left([\![p]\!] - \rho^{\oplus}c^{\oplus}\,\underline{n}\cdot[\![\underline{u}]\!]\right)\underline{n}\,\frac{1}{2}$$

* **schéma semi-discret** (LOCAL)

On utilise les représentations

$$p^k(\underline{x},t) = \sum_{j=1}^{N_p} p_j^k(t)\,\ell_j(\underline{x}) \qquad \text{(A)}$$
$$\underline{u}^k(\underline{x},t) = \sum_{j=1}^{N_p} \underline{u}_j^k(t)\,\ell_j(\underline{x})$$

$$\underline{u}_j^k(t) = u^k_{1,j}(t)\,\hat{\underline{x}}_1 + u^k_{2,j}(t)\,\hat{\underline{x}}_2 + u^k_{3,j}(t)\,\hat{\underline{x}}_3$$

les fonctions-test $\{\ell_i^k\}_{i=1}^{N_p}$ pour $\psi(\underline{x})$ (B)

$\{\ell_i^k\hat{\underline{x}}_1, \ell_i^k\hat{\underline{x}}_2, \ell_i^k\hat{\underline{x}}_3\}_{i=1}^{N_p}$ pour $\underline{\phi}(\underline{x})$

On suppose ρ et c constant par élément :

$$\left|\begin{array}{l}\rho(\underline{x}) = \rho^k \\ c(\underline{x}) = c^k\end{array}\right. \quad \text{pour } \underline{x}\in D^k \qquad \text{(C)}$$

⑤

On considère l'eqn qui gouverne $p^k(\underline{x},t)$ $(t>0)$

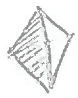
- $\int_{D^k} (\partial_t p^k + \varphi^k (c^k)^2 \nabla\cdot \underline{u}^k)\,\psi\, d\underline{x} + \int_{\partial D^k} s_p\, \psi\, d\underline{x} = 0, \quad \forall \psi$

- $\int_{D^k} (\partial_t p^k\, \psi)\, d\underline{x} + \sum_{d=1}^{3} \int_{D^k} \varphi^k (c^k)^2 (\partial_{x_d} \underline{u_d|^k})\, \psi\, d\underline{x}$

indice directº spatiale — ↳ composante "x_d" de $\underline{u}^k$

$+ \sum_{f=1}^{4} \int_{\Gamma_f^k} s_p\, \psi\, d\underline{x} = 0, \quad \forall \psi$

indice f — face "f" de D^k



4 faces pour tet.
$\partial D^k = \bigcup_{f=1}^{4} \Gamma_f^k$

vu Ⓐ & Ⓑ
↳
- $\int_{D^k} \left(\sum_{j=1}^{N_p} (d_t p_j^k\, \ell_j^k)\, \ell_i^k \right) d\underline{x}$

$+ \sum_{d=1}^{3} \int_{D^k} \varphi^k (c^k)^2 \left(\sum_{j=1}^{N_p} u_d|_j^k\, \partial_{x_d} \ell_j^k \right) \ell_i^k\, d\underline{x}$

$+ \sum_{f=1}^{4} \int_{\Gamma_f^k} \Bigg(\underbrace{\sum_{\substack{j \text{ tel que} \\ \underline{\xi}_j^k \in \Gamma_f^k}} s_p|_j^k\, \ell_j^k}_{\text{On évalue ce "terme de surface" en utilisant les noeuds appartenant à } \Gamma_f^k} \Bigg) \ell_i^k\, d\underline{x} = 0, \quad \text{pour } i = 1 \dots N_p$

pénalité évaluée au noeud $\underline{\xi}_j^k$

vu Ⓒ
↳
- $\sum_{j=1}^{N_p} \underbrace{\boxed{\int_{D^k} \ell_j^k \ell_i^k\, d\underline{x}}}_{(\mathbb{M}^k)_{ij}}\, d_t p_j^k$

$+ \varphi^k (c^k)^2 \sum_{d=1}^{3} \sum_{j=1}^{N_p} \underbrace{\boxed{\int_{D^k} \partial_{x_d} \ell_j^k\, \ell_i^k\, d\underline{x}}}_{(\mathbb{S}_d^k)_{ij}}\, u_d|_j^k$

$+ \sum_{f=1}^{4} \sum_{\substack{j \text{ tel que} \\ \underline{\xi}_j^k \in \Gamma_f^k}} \underbrace{\boxed{\int_{\Gamma_f^k} \ell_j^k \ell_i^k\, d\underline{x}}}_{(\tilde{\mathbb{M}}_f^k)_{ij}}\, s_p|_j^k = 0, \quad \text{pour } i = 1 \dots N_p$

matrice $N_p \times N_p$

$$\Rightarrow \boxed{\underline{\underline{\mathbb{M}}}^k\, d_t [p_j^k] + \varphi^k (c^k)^2 \sum_{d=1}^{3} \underline{\underline{\mathbb{S}}}_d^k\, [u_d|_j^k] + \sum_{f=1}^{4} \underline{\underline{\tilde{\mathbb{M}}}}_f^k\, [s_p|_j^k] = 0}$$

matrice $N_p \times N_p$

tableau d'inconnues (N_p val.)

matrice $N_p \times N_{fp}$

tableau termes de pénalités (N_{fp} val.)

On considère l'eqn qui gouverne $\underline{u}^k(\underline{x},t)$ $(t>0)$

- $\int_{D^k} (\varphi^k \partial_t \underline{u}^k + \nabla p^k) \cdot \underline{\phi} \, d\underline{x} + \int_{\partial D^k} \underline{s}_{\underline{u}} \cdot \underline{\phi} \, d\underline{x} = 0, \ \forall \underline{\phi}$

- $\int_{D^k} (\varphi^k \partial_t \underline{u}^k \cdot \underline{\phi}) \, d\underline{x} + \sum_{d=1}^{3} \int_{D^k} (\partial_{x_d} p^k \underbrace{\hat{\underline{x}}_d}_{\text{vec unitaire corresp. à chr. } x_d}) \cdot \underline{\phi} \, d\underline{x}$

$$+ \sum_{f=1}^{4} \int_{\Gamma_f^k} \underline{s}_u \cdot \underline{\phi} \, d\underline{x} = 0, \ \forall \underline{\phi}$$

vu Ⓐ & Ⓑ
- $\int_{D^k} \left(\varphi^k \sum_{j=1}^{N_p} (d_t \underbrace{u_d|_j^k}_{\text{composante "}x_d\text{" de } \underline{u}|_j^k} \ell_j^k) \ell_i^k \right) d\underline{x}$

$$+ \int_{D^k} \left(\sum_{j=1}^{N_p} p_j^k \, \partial_{x_d} \ell_j^k \right) \ell_i^k \, d\underline{x}$$

$$+ \sum_{f=1}^{4} \int_{\Gamma_f^k} \left(\sum_{\substack{j \text{ tel que} \\ \underline{\xi}_j^k \in \Gamma_f^k}} s_{u_d}|_j^k \ell_j^k \right) \ell_i^k \, d\underline{x} = 0$$

par $i = 1 \dots N_p$, $d = 1,2,3$

vu Ⓒ
- $\varphi^k \sum_{j=1}^{N_p} \underbrace{\boxed{\int_{D^k} \ell_j^k \ell_i^k \, d\underline{x}}}_{(\mathbb{M}^k)_{ij}} d_t u_d|_j^k$

$$+ \sum_{j=1}^{N_p} \underbrace{\boxed{\int_{D^k} \partial_{x_d} \ell_j^k \, \ell_i^k \, d\underline{x}}}_{(\mathbb{S}_d^k)_{ij}} p_j^k$$

$$+ \sum_{f=1}^{4} \sum_{\substack{j \text{ tel que} \\ \underline{\xi}_j^k \in \Gamma_f^k}} \underbrace{\boxed{\int_{\Gamma_f^k} \ell_j^k \ell_i^k \, d\underline{x}}}_{(\tilde{\mathbb{M}}_f^k)_{ij}} s_{u_d}|_j^k = 0,$$

par $i = 1 \dots N_p$, $d = 1,2,3$

$$\Rightarrow \boxed{\varphi^k \, \underline{\underline{\mathbb{M}}}^k \, d_t [u_d|_j^k] + \underline{\underline{\mathbb{S}}}_d^k \, [p_j^k] + \sum_{f=1}^{4} \underline{\underline{\tilde{\mathbb{M}}}}_f^k \, [s_{u_d}] = 0}$$

pour $d = 1,2,3$

* Résumé du schéma semi-discret (LOCAL)

4 systèmes de N_p eqn à N_p inconnues pour chaque elem D^k

$$\underline{\underline{\mathbb{M}}}^k d_t[p_j^k] + \rho^k (c^k)^2 \sum_{d=1}^{3} \underline{\underline{S}}_d^k [u_d|_j^k] + \sum_{f=1}^{4} \underline{\underline{\tilde{\mathbb{M}}}}_f^k [S_p|_j^k] = 0$$

$$\rho^k \underline{\underline{\mathbb{M}}}^k d_t[u_d|_j^k] + \underline{\underline{S}}_d^k [p_j^k] + \sum_{f=1}^{4} \underline{\underline{\tilde{\mathbb{M}}}}_f^k [S_{u_d}|_j^k] = 0, \quad d=1,2,3$$

- Amélioration 1 : On pré-calcule l'inverse de $\underline{\underline{M}}^k$ et on pré-multiplie les equations par $(\underline{\underline{M}}^k)^{-1}$
  - → Il n'y a plus de matrice devant le premier terme.
  - → Devant les autres, on a :

$$(\underline{\underline{M}}^k)^{-1} \underline{\underline{S}}_d^k = \underline{\underline{D}}_d^k \quad \text{mat. DIFFERENTIATION}$$
$$(\underline{\underline{M}}^k)^{-1} \underline{\underline{\tilde{\mathbb{M}}}}_f^k = \underline{\underline{L}}_f^k \quad \text{mat. "LIFT"}$$

- Amélioration 2 : On calcule $\underline{\underline{D}}_d^k$ et $\underline{\underline{L}}_f^k$ pour D^k sur base des mat. $\underline{\underline{D}}_d$ et $\underline{\underline{L}}_f$ de l'elem. de ref. $\hat{D}$

$$\underline{\underline{D}}_d^k = \sum_{e=1}^{3} g_{de}^k \boxed{\underline{\underline{D}}_e}$$
$$\underline{\underline{L}}_f^k = F_f^k \boxed{\underline{\underline{L}}_f}$$

matrices de ref

facteurs géométriques pour passer de l'element de ref. $\hat{D}$ à D^k.

$$\boxed{\begin{aligned} & d_t[p_j^k] + \rho^k (c^k)^2 \sum_{d=1}^{3} \sum_{e=1}^{3} g_{de}^k \underline{\underline{\mathbb{D}}}_e [u_d|_j^k] + \sum_{f=1}^{4} F_f^k \underline{\underline{L}}_f [S_p|_j^k] = 0 \\ & \rho^k d_t[u_d|_j^k] + \sum_{e=1}^{3} g_{de}^k \underline{\underline{\mathbb{D}}}_e [p_j^k] + \sum_{f=1}^{4} F_f^k \underline{\underline{L}}_f [S_{u_d}|_j^k] = 0, \quad d=1,2,3 \end{aligned}}$$

termes instationnaires — termes de VOLUME — termes de SURFACE

Schéma discret avec Runge-Kutta en temps

On réécrit le schéma semi-discret de façon abstraite

$$\underbrace{d_t \begin{bmatrix} [\rho_j^k] \\ [u_{1j}^k] \\ [u_{2j}^k] \\ [u_{3j}^k] \end{bmatrix}}_{q^k} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\rho^k (c^k)^2 \Sigma_d \Sigma_e\, g_{de}^k\, \underline{\underline{D}}_e\, [u_{dj}^k] - \Sigma_f\, F_f^k\, \underline{\underline{L}}_f\, [S_{pj}^k] \\ -1/\rho^k\, \Sigma_e\, g_{1e}^k\, \underline{\underline{D}}_e\, [\rho_j^k] - 1/\rho^k\, \Sigma_f\, F_f^k\, \underline{\underline{L}}_f\, [S_{u_1}|_j^k] \\ -1/\rho^k\, \Sigma_e\, g_{2e}^k\, \underline{\underline{D}}_e\, [\rho_j^k] - 1/\rho^k\, \Sigma_f\, F_f^k\, \underline{\underline{L}}_f\, [S_{u_2}|_j^k] \\ -1/\rho^k\, \Sigma_e\, g_{3e}^k\, \underline{\underline{D}}_e\, [\rho_j^k] - 1/\rho^k\, \Sigma_f\, F_f^k\, \underline{\underline{L}}_f\, [S_{u_3}|_j^k] \end{bmatrix}}_{\underline{rhs}^k \text{ (Right-hand-side term)}}$$

$$\rightsquigarrow \boxed{d_t\, q^k = \underline{rhs}^k}$$

On résout ce système en utilisant un schéma temporel classique
ex : Euler, Adams-Bashforth, Runge-Kutta ...

- **Euler explicite**

indice "temps"

$$\frac{q^{k,m+1} - q^{k,m}}{\Delta t} = \underline{rhs}^{k,m}$$

Δt : pas temporel

Right-hand-side term calculé en utilisant $q^{k,m}$

$$\rightsquigarrow \quad q^{k,m+1} = q^{k,m} + \Delta t\, \underline{rhs}^{k,m}$$

- **Runge-Kutta "44"** (4 niveaux – erreur $\mathcal{O}(\Delta t^4)$)

$$q^{k,m+1} = q^{k,m} + \Delta t \sum_{n=0}^{3} b_n\, \underline{rhs}^{k,m+n/4}$$

avec $\tilde{q}^{k,m+\alpha/4} = q^{k,m} + \Delta t \sum_{n=0}^{\alpha} a_{\alpha n}\, \underline{rhs}^{k,m+\alpha/4}$ $\qquad \alpha = 1,2,3$

$\underline{rhs}^{k,m+\alpha/4}$ (calculé en utilisant $\tilde{q}^{k,m+\alpha/4}$)

- **Runge-Kutta "Low-storage" "54"** (5 niveaux – erreur $\mathcal{O}(\Delta t^4)$)

$$q^{k,m+1} = \tilde{q}^{k,m+1}$$

avec $\tilde{q}^{k,m+(n+1)/5} = \tilde{q}^{k,m+n/5} + b_n\, \underline{res}^{k,m+(n+1)/5}$ $\qquad n = 0,1,2,3,4$

$\underline{res}^{k,m+(n+1)/5} = a_n\, \underline{res}^{k,m+n/5} + \Delta t\, \underline{rhs}^{k,m+n/5}$

$\underline{rhs}^{k,m+n/5}$ (calculé en utilisant $\tilde{q}^{k,m+n/5}$)

(note : $a_0 = 0$)

Version algorithmique :

Initialisation : $q^{k,0}$ (temps $t=0$) $\forall k$.

FOR $m = 0, 1, \dots$

FOR $n = 0, 1, 2, 3, 4$

Calcul de $rhs^{k,m+n/5}$ en utilisant $q^{k,m+n/5}$ $\forall k$

$res^{k,m+(n+1)/5} = a_n \, res^{k,m+n/5} + \Delta t \, rhs^{k,m+n/5}$ $\forall k$

$q^{k,m+(n+1)/5} = q^{k,m+n/5} + b_n \, res^{k,m+(n+1)/5}$ $\forall k$.

END

END

→ boucle intérieure : itérations sur 5 niveaux

→ boucle extérieure : itérations sur les pas de temps.