



INSTITUT
POLYTECHNIQUE
DE PARIS



Cours SIM203

Initiation au calcul haute performance

Introduction aux éléments finis discontinus

Axel Modave — 8 avril 2024

Représentation de la solution numérique

Une méthode d'éléments finis continus

Une méthode d'éléments finis discontinus

Éléments finis discontinus — Motivation

Par rapport aux différences finies et aux volumes finis, les **méthodes d'éléments finis (EF)** permettent de résoudre des problèmes d'équations aux dérivées partielles :

- avec **grande précision** (*convergence d'ordre élevé — fonctions de base polynomiales*)
- avec **flexibilité géométrique** (*car basées sur des maillage non-structurés*)

Parmi les méthodes EF, celles basées sur des **EF discontinus** ont deux avantages :

- Elles permettent de **représenter plus naturellement des solutions discontinues** (*ex. chocs en mécanique des fluides, ruptures en mécanique des solides, ...*)
- Elles ont une **structure algorithmique intéressante** pour du calcul à haute performance (*dont calcul parallèle à mémoire distribuée*)

Objectif de cette séance : Introduire une méthode d'EF discontinus pour des ondes acoustiques / scalaires.

2

Représentation de la solution — Maillage et noeuds

Maillage

On considère un maillage du domaine

$$\Omega = \bigcup_{k=1}^K D^k$$

domaine
 D^k
 $k^{\text{ième}}$ maille

avec $D^k \cap D^l = \emptyset \quad \forall k \neq l$
 $D^k \neq \emptyset \quad \forall k$

4

Représentation de la solution — Maillage et noeuds

Maillage

On considère un maillage du domaine

$$\Omega = \bigcup_{k=1}^K D^k \quad \text{avec} \quad D^k \cup D^l = \emptyset \quad \forall k \neq l$$

$D^k \neq \emptyset \quad \forall k$
domaine k^{ème} maille

Noeuds ("nodes")

Sur chaque maille, la sol. est approx. par un polynôme d'ordre max. N .
 Pour représenter la sol., on choisit un ensemble de noeuds $\{\xi_j^k\}_{j=1}^{N_p}$

k = indice maille
 j = indice noeud

	$N=1$	$N=2$	$N=3$	
1D	 $N_p=2$	 $N_p=3$	 $N_p=4$	élément linéaire
2D	 $N_p=3$	 $N_p=6$	 $N_p=10$	élément triangulaire

Représentation de la solution — Local / Global

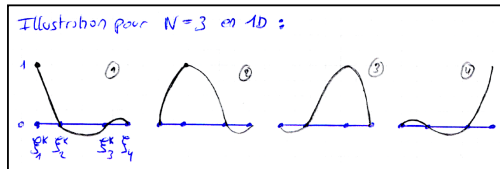
Représentation locale

Sur chaque maille D^k , la sol. approx. est développée sur une base composée de polynômes de Lagrange $\{\ell_j^k\}_{j=1-N_p}$

$$p(x,t)|_{D^k} \approx p^k(x,t) = \sum_{j=1}^{N_p} p_j^k(t) \ell_j^k(x)$$

sol. exacte sur D^k sol. approx sur D^k Val. de la sol. approx. au noeud ξ_j^k poly. de Lagrange assoc. au noeud ξ_j^k fonction de base locale

propriétés: $\ell_j^k(\xi_i^k) = \delta_{ij}$ $\ell_j^k(x) = \prod_{i \neq j} \frac{x - \xi_i^k}{\xi_j^k - \xi_i^k}$



Représentation de la solution — Maillage et noeuds

	$N=1$	$N=2$	$N=3$	
1D	 $N_p=2$	 $N_p=3$	 $N_p=4$	élément linéaire
2D	 $N_p=3$	 $N_p=6$	 $N_p=10$	élément triangulaire
3D	 $N_p=4$	 $N_p=10$	 $N_p=20$	élément tétraédrique

Notation

	1D	2D	3D
Nombre de faces	N_{face}	2	3
Nombre de "vertex"	N_v	2	3
Nombre de "vertex" par face	N_{pv}	1	2
Nombre de noeuds	N_p	$N+1$	$(N+1)(N+2)/2$
Nombre de noeuds par face	N_{pf}	1	$(N+1)(N+2)/2$

Représentation de la solution — Local / Global

Représentation locale

Sur chaque maille D^k , la sol. approx. est développée sur une base composée de polynômes de Lagrange $\{\ell_j^k\}_{j=1-N_p}$

$$p(x,t)|_{D^k} \approx p^k(x,t) = \sum_{j=1}^{N_p} p_j^k(t) \ell_j^k(x)$$

sol. exacte sur D^k sol. approx sur D^k Val. de la sol. approx. au noeud ξ_j^k poly. de Lagrange assoc. au noeud ξ_j^k fonction de base locale

Représentation globale — Cas continu

On impose la continuité de la sol. approx.
 On peut rep. la sol. approx. avec des fonctions de base globales continues.

$$p(x,t) \approx p_h(x,t) = \sum_{j=1}^{N_{tot}} p_j(t) L_j(x)$$

nombre de noeuds (NODES) dans tout le maillage fonction de base globale



$$V_h = \{v_h \in C^0(\Omega), v_h|_{D^k} \in P^N(D^k), k = 1 \dots K\}$$

Représentation de la solution — Local / Global

Représentation locale

Sur chaque maille D^k , la sol. approx. est développée sur une base composée de polynômes de Lagrange $\{e_j^k\}_{j=1-N_p}$

$$p(x,t)|_{D^k} \approx p^k(x,t) = \sum_{j=1}^{N_p} p_j^k(t) e_j^k(x)$$

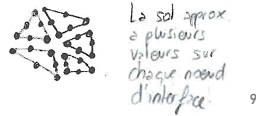
Nombres de noeuds dans un elem.
 fonction de base locale
 sol. exacte sur D^k / sol. approx sur D^k
 Val. de la sol. approx. au noeud e_j^k / poly. de Lagrange assoc. au noeud e_j^k

Représentation globale — Cas discontinu

Pas de continuité de la sol. approx. aux interfaces. Elle peut avoir des val. \neq de prt. et d'autre de chaque interf.

$$p(x,t) \approx p_h(x,t) = \bigoplus_{k=1}^K p^k(x,t)$$

$$V_h = \bigoplus_{k=1}^K P^N(D^k)$$



Représentation de la solution numérique
Une méthode d'éléments finis continus
 Une méthode d'éléments finis discontinus

Une méthode d'EF continus

1. Problème considéré — Propagation des ondes

Trouver $p(x,t) \in C^1(\Omega \times]0, T])$ t.q.

$$\begin{cases} \partial_{tt} p - \nabla \cdot (\mu \nabla p) = 0 & x \in \Omega, t \in]0, T] & \text{eqn ondes} \\ \partial_n p|_{\partial \Omega} = 0 & x \in \partial \Omega, t \in]0, T] & \text{conditions au limite de Neumann} \\ p(x,0) = p_0(x) & x \in \Omega & \text{conditions initiales (C.I.)} \\ \partial_t p|_{(x,0)} = P_1(x) & x \in \Omega & \end{cases}$$

Une méthode d'EF continus

Trouver $p(x,t) \in C^1(\Omega \times]0, T])$ t.q.

$$\begin{cases} \partial_{tt} p - \nabla \cdot (\mu \nabla p) = 0 & x \in \Omega, t \in]0, T] \\ \partial_n p|_{\partial \Omega} = 0 & x \in \partial \Omega, t \in]0, T] \\ p(x,0) = p_0(x) & x \in \Omega \\ \partial_t p|_{(x,0)} = P_1(x) & x \in \Omega \end{cases}$$

2. Formulation variationnelle du problème semi-discret

Trouver $p_h(x,t) \in C^1(V_h,]0, T])$ t.q.

$$d_{tt} \left(\int_{\Omega} p_h(x,t) q_h(x) dx \right) + \int_{\Omega} \mu \nabla p_h(x,t) \cdot \nabla q_h(x) dx = 0,$$

avec $\begin{cases} p_h(x,0) = P_{h,0}(x) \\ d_t p_h|_{(x,0)} = P_{h,1}(x) \end{cases} \quad \forall q_h(x) \in V_h, t \in]0, T]$

Une méthode d'EF continus

Trouver $p_h(\underline{x}, t) \in C^1(V_h, [0, T])$ t.q.

$$d_{tt} \left(\int_{\Omega} p_h(\underline{x}, t) q_h(\underline{x}) d\underline{x} \right) + \int_{\Omega} \mu \nabla p_h(\underline{x}, t) \cdot \nabla q_h(\underline{x}) d\underline{x} = 0,$$

$\forall q_h(\underline{x}) \in V_h, t \in [0, T]$

3. Schéma semi-discret en espace

On utilise la représentation $p_h(\underline{x}, t) = \sum_{j=1}^{M_h} p_j(t) L_j(\underline{x})$
 Les fonctions-test $\{L_I\}_{I=1}^{M_h}$

On a :

$$\sum_j \left(\int_{\Omega} L_j L_I d\underline{x} \right) d_{tt} p_j + \sum_j \int_{\Omega} \mu \nabla L_j \cdot \nabla L_I d\underline{x} p_j = 0$$

par $I=1, \dots, M_h, t \in [0, T]$

$\Rightarrow M d_{tt}[P_j] + K^* [P_j] = 0$

matrice de masse matrice de raideur

tableau avec les inconnues discrètes

Une méthode d'EF discontinus

Problème considéré – Propagation des ondes

$$\begin{cases} \partial_t p + \rho c^2 \nabla \cdot \underline{u} = 0 \\ \rho \partial_t \underline{u} + \nabla p = 0 \end{cases} \quad \underline{x} \in \Omega, t \in [0, T] \quad \text{Syst. ondes}$$

$$\underline{u} \cdot \underline{n} |_{\partial \Omega} = 0 \quad \underline{x} \in \partial \Omega, t \in [0, T] \quad \text{C.L.}$$

$$\begin{cases} p(\underline{x}, 0) = p_0(\underline{x}) \\ \underline{u}(\underline{x}, 0) = \underline{u}_0(\underline{x}) \end{cases} \quad \underline{x} \in \Omega \quad \text{C.I.}$$

Rappel du problème avec l'équation des ondes :

Trouver $p(\underline{x}, t) \in C^1([0, T])$ t.q.

$$\begin{cases} \partial_{tt} p - \nabla \cdot (\mu \nabla p) = 0 & \underline{x} \in \Omega, t \in [0, T] \\ \partial_n p |_{\partial \Omega} = 0 & \underline{x} \in \partial \Omega, t \in [0, T] \\ p(\underline{x}, 0) = p_0(\underline{x}) \\ \partial_t p |_{\underline{x}, 0} = p_1(\underline{x}) \end{cases} \quad \underline{x} \in \Omega$$

Représentation de la solution numérique Une méthode d'éléments finis continus Une méthode d'éléments finis discontinus

Problème et formulation variationnelle
Schéma semi-discret en espace
Schéma discret en temps et en espace

Une méthode d'EF discontinus

Problème de départ :

$$\begin{cases} \partial_t p + \rho c^2 \nabla \cdot \underline{u} = 0 \\ \rho \partial_t \underline{u} + \nabla p = 0 \end{cases} \quad \underline{x} \in \Omega, t \in [0, T]$$

$$\underline{u} \cdot \underline{n} |_{\partial \Omega} = 0 \quad \underline{x} \in \partial \Omega, t \in [0, T]$$

$$\begin{cases} p(\underline{x}, 0) = p_0(\underline{x}) \\ \underline{u}(\underline{x}, 0) = \underline{u}_0(\underline{x}) \end{cases} \quad \underline{x} \in \Omega$$

Représentation de la solution :

$$\begin{cases} p(\underline{x}, t) |_{\Omega^k} \approx p^k(\underline{x}, t) = \sum_{j=1}^{M_p} p_j^k(t) L_j^k(\underline{x}) \\ \underline{u}(\underline{x}, t) |_{\Omega^k} \approx \underline{u}^k(\underline{x}, t) = \sum_{j=1}^{M_u} u_j^k(t) L_j^k(\underline{x}) \end{cases}$$

Formulation variationnelle du problème semi-discret (représentation locale)

Trouver $p^k(\underline{x}, t) \in C^1(P^k(\Omega^k); [0, T])$
 $\underline{u}^k(\underline{x}, t) \in C^1((P^k(\Omega^k))^3; [0, T])$, $\forall \Omega^k$, t.q.

$$\int_{\Omega^k} (\partial_t p^k + \rho c^2 \nabla \cdot \underline{u}^k) \psi(\underline{x}) d\underline{x} + \int_{\partial \Omega^k} [s_p(\underline{x}, t)] \psi(\underline{x}) d\underline{x} = 0$$

$\forall \psi(\underline{x}) \in P^k(\Omega^k)$
 $t \in [0, T]$

$$\int_{\Omega^k} (\rho \partial_t \underline{u}^k + \nabla p^k) \cdot \underline{\phi}(\underline{x}) d\underline{x} + \int_{\partial \Omega^k} [s_u(\underline{x}, t)] \cdot \underline{\phi}(\underline{x}) d\underline{x} = 0$$

$\forall \underline{\phi}(\underline{x}) \in (P^k(\Omega^k))^3$
 $t \in [0, T]$

Le couplage entre les éléments se fait grâce aux termes de pénalités $s_p(\underline{x}, t)$ et $s_u(\underline{x}, t)$ qui dépendent de la solution des deux côtés de chaque interface.



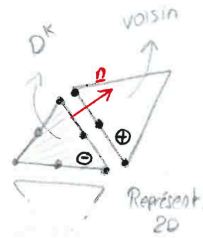
Une méthode d'EF discontinus

$$\int_{D^k} (\partial_t p^k + p c^2 \nabla \cdot u^k) \psi(x) dx + \int_{\partial D^k} \overline{Sp(z,t)} \psi(x) dx = 0$$

$\forall \psi(x) \in P^N(D^k)$
 $t \in [0, T]$

$$\int_{D^k} (A u^k + \nabla p^k) \cdot \phi(x) dx + \int_{\partial D^k} \overline{Su(x,t)} \cdot \phi(x) dx = 0$$

$\forall \phi(x) \in (P^M(D^k))^3$
 $t \in [0, T]$



Termes de pénalité

\underline{n} normale unitaire ext. à D^k
sur ∂D^k
 $p^{\ominus} u^{\ominus}$ val. des champs "intérieurs"
(càd correspondant à D^k)
 $p^{\oplus} u^{\oplus}$ val. des champs "extérieurs"
(càd corresp. au voisin)

$$[P] = p^{\oplus} - p^{\ominus} \quad \text{saut}$$

$$\{ \{ p \} \} = (p^{\oplus} + p^{\ominus}) / 2 \quad \text{moyenne}$$

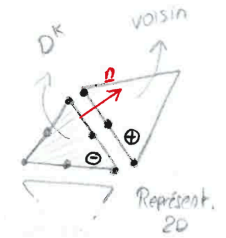
Une méthode d'EF discontinus

$$\int_{D^k} (\partial_t p^k + p c^2 \nabla \cdot u^k) \psi(x) dx + \int_{\partial D^k} \overline{Sp(z,t)} \psi(x) dx = 0$$

$\forall \psi(x) \in P^N(D^k)$
 $t \in [0, T]$

$$\int_{D^k} (A u^k + \nabla p^k) \cdot \phi(x) dx + \int_{\partial D^k} \overline{Su(x,t)} \cdot \phi(x) dx = 0$$

$\forall \phi(x) \in (P^M(D^k))^3$
 $t \in [0, T]$



Termes de pénalité

\underline{n} normale unitaire ext. à D^k
sur ∂D^k
 $p^{\ominus} u^{\ominus}$ val. des champs "intérieurs"
(càd correspondant à D^k)
 $p^{\oplus} u^{\oplus}$ val. des champs "extérieurs"
(càd corresp. au voisin)

$$[P] = p^{\oplus} - p^{\ominus} \quad \text{saut}$$

$$\{ \{ p \} \} = (p^{\oplus} + p^{\ominus}) / 2 \quad \text{moyenne}$$

$$S_p = c^{\ominus} / \{ \{ \psi c \} \} (\underline{n} \cdot [u] - 1/p^{\oplus} [P]) \ 1/2$$

$$S_u = p^{\oplus} c^{\ominus} / \{ \{ \psi c \} \} ([P] - \psi c^{\oplus} \underline{n} \cdot [u]) \ 1/2$$

Choix classique pour les termes de pénalité de type "upwind".

Représentation de la solution numérique Une méthode d'éléments finis continus Une méthode d'éléments finis discontinus

Problème de départ et formulation variationnelle
Schéma semi-discret en espace
Schéma discret en temps et en espace

Une méthode d'EF discontinus — Schéma semi-discret

$$\int_{D^k} (\partial_t p^k + p c^2 \nabla \cdot u^k) \psi(x) dx + \int_{\partial D^k} \overline{Sp(z,t)} \psi(x) dx = 0$$

$\forall \psi(x) \in P^N(D^k)$
 $t \in [0, T]$

$$\int_{D^k} (A u^k + \nabla p^k) \cdot \phi(x) dx + \int_{\partial D^k} \overline{Su(x,t)} \cdot \phi(x) dx = 0$$

$\forall \phi(x) \in (P^M(D^k))^3$
 $t \in [0, T]$

Choix et hypothèses

$$u = \sum_{j=1}^M u_{j,i}^k(t) \hat{x}_j + \sum_{j=1}^M u_{j,i}^k(t) \hat{x}_j$$

On utilise les représentations $p^k(x,t) = \sum_{j=1}^{MP} p_j^k(t) \ell_j(x)$ (A) Choix de représentation
 $u^k(x,t) = \sum_{j=1}^{MP} (u_j^k(t)) \ell_j(x)$
 les fonctions-test $\{ \ell_i^k \}_{i=1}^{MP}$ pour $\psi(x)$ (B) Choix des fonctions tests
 $\{ e_i^k \hat{x}_1, e_i^k \hat{x}_2, e_i^k \hat{x}_3 \}_{i=1}^{MP}$ pour $\phi(x)$

On suppose ρ et c constant par élément :

$$\rho(x) = \rho^k \quad \text{pour } x \in D^k$$

$$c(x) = c^k$$

(C) Hypothèse sur les paramètres

Une méthode d'EF discontinus — Schéma semi-discret

Équation semi-discrète (représentation locale) pour l'équation "en p" [terme de volume]

$$\int_{D^k} (\partial_t p^k + \varphi^k(c^k) \nabla \cdot \underline{u}^k) \Psi dx + \int_{\partial D^k} s_p \Psi dx = 0, \forall \Psi$$

$\int_{D^k} (\partial_t p^k \Psi) dx + \sum_{d=1}^3 \int_{D^k} \varphi^k(c^k)^2 (\partial_{x_d} u_d^k) \Psi dx$
indice direct spatial composante "x_d" de \underline{u}^k

$\int_{D^k} (\sum_{j=1}^{N_p} d_{t,p_j^k} e_j^k) e_i^k dx + \sum_{d=1}^3 \int_{D^k} \varphi^k(c^k)^2 (\sum_{j=1}^{N_p} u_d^k \partial_{x_d} e_j^k) e_i^k dx$

$\sum_{j=1}^{N_p} \int_{D^k} e_j^k e_i^k dx d_{t,p_j^k} + \varphi^k(c^k)^2 \sum_{d=1}^3 \sum_{j=1}^{N_p} \int_{D^k} \partial_{x_d} e_j^k e_i^k dx u_d^k$

21

Une méthode d'EF discontinus — Schéma semi-discret

Équation semi-discrète (représentation locale) pour l'équation "en p" [terme de surface]

$$\int_{D^k} (\partial_t p^k + \varphi^k(c^k) \nabla \cdot \underline{u}^k) \Psi dx + \int_{\partial D^k} s_p \Psi dx = 0, \forall \Psi$$

$\sum_{f=1}^4 \int_{\Gamma_f^k} s_p \Psi dx$
indice f face f de D^k

$\sum_{f=1}^4 \int_{\Gamma_f^k} (\sum_{j \text{ tel que } \xi_j^k \in \Gamma_f^k} s_{p,j}^k) e_j^k dx = 0$
on évalue ce "terme de surface" en utilisant les nœuds appartenant à Γ_f^k pénalité évaluée au nœud ξ_j^k

$\sum_{f=1}^4 \sum_{j \text{ tel que } \xi_j^k \in \Gamma_f^k} \int_{\Gamma_f^k} e_j^k e_i^k dx s_{p,j}^k$

22

Une méthode d'EF discontinus — Schéma semi-discret

Équation semi-discrète (représentation locale) pour l'équation "en p" [résumé]

$$\int_{D^k} (\partial_t p^k + \varphi^k(c^k) \nabla \cdot \underline{u}^k) \Psi dx + \int_{\partial D^k} s_p \Psi dx = 0, \forall \Psi$$

$\sum_{j=1}^{N_p} \int_{D^k} e_j^k e_i^k dx d_{t,p_j^k} + \varphi^k(c^k)^2 \sum_{d=1}^3 \sum_{j=1}^{N_p} \int_{D^k} \partial_{x_d} e_j^k e_i^k dx u_d^k + \sum_{f=1}^4 \sum_{j \text{ tel que } \xi_j^k \in \Gamma_f^k} \int_{\Gamma_f^k} e_j^k e_i^k dx s_{p,j}^k = 0, \text{ par } i=1 \dots N_p$

$\underline{M}^k d_t [P_j^k] + \varphi^k(c^k)^2 \sum_{d=1}^3 \underline{S}_d^k [u_d^k] + \sum_{f=1}^4 \underline{M}_f^k [s_{p,j}^k] = 0$

matrice $N_p \times N_p$ matrice $N_p \times N_{fp}$ tableau d'inconnues (N_p val.) tableau termes de pénalités (N_{fp} val.)

23

Une méthode d'EF discontinus — Schéma semi-discret

Équation semi-discrète (représentation locale) pour l'équation "en u" [résumé]

$$\int_{D^k} (\varphi^k \partial_t \underline{u}^k + \nabla p^k) \cdot \underline{\phi} dx + \int_{\partial D^k} s_u \cdot \underline{\phi} dx = 0, \forall \underline{\phi}$$

$\varphi^k \sum_{j=1}^{N_p} \int_{D^k} e_j^k e_i^k dx d_t u_d^k + \sum_{j=1}^{N_p} \int_{D^k} \partial_{x_d} e_j^k e_i^k dx p_j^k + \sum_{f=1}^4 \sum_{j \text{ tel que } \xi_j^k \in \Gamma_f^k} \int_{\Gamma_f^k} e_j^k e_i^k dx s_{u,j}^k = 0, \text{ par } i=1 \dots N_p, d=1,2,3$

$\varphi^k \underline{M}^k d_t [u_d^k] + \underline{S}_d^k [P_j^k] + \sum_{f=1}^4 \underline{M}_f^k [s_{u,d}^k] = 0$

par $d=1,2,3$

24

Une méthode d'EF discontinus — Schéma semi-discret

$$\int_{D^k} (\partial_t p^k + \rho c^2 \nabla \cdot u^k) \psi(x) dx + \int_{\partial D^k} [S_p(z,t)] \psi(x) dx = 0 \quad \forall \psi(x) \in P^k(D^k) \quad t \in (0, T)$$

$$\int_{D^k} (\rho u^k + \nabla p^k) \cdot \phi(x) dx + \int_{\partial D^k} [S_u(x,t)] \cdot \phi(x) dx = 0 \quad \forall \phi(x) \in (P^k(D^k))^3 \quad t \in (0, T)$$

Résumé du schéma semi-discret

$$\begin{cases} \underline{M}^k d_t [P_j^k] + \rho^k (c^k)^2 \sum_{d=1}^3 \underline{D}_d^k [u_d]_j^k + \sum_{f=1}^4 \underline{M}_f^k [S_{p1}]_j^k = 0 \\ \rho^k \underline{M}^k d_t [u_d]_j^k + \underline{D}_d^k [P_j^k] + \sum_{f=1}^4 \underline{M}_f^k [S_{u1}]_j^k = 0, \quad d=1,2,3 \end{cases}$$

25

Une méthode d'EF discontinus — Schéma semi-discret

Amélioration (1) du schéma semi-discret

On pré-calculé l'inverse de \underline{M}^k et on pré-multiplie les équations par $(\underline{M}^k)^{-1}$

→ Il n'y a plus de matrice devant le premier terme

→ Devant les autres, on a :

$$\begin{aligned} (\underline{M}^k)^{-1} \underline{D}_d^k &= \underline{D}_d^k \quad \text{Mét DIFFÉRENTIATION} \\ (\underline{M}^k)^{-1} \underline{M}_f^k &= \underline{L}_f^k \quad \text{Mét "LIFT"} \end{aligned}$$

Schéma semi-discret amélioré

$$\begin{cases} d_t [P_j^k] + \rho^k (c^k)^2 \sum_{d=1}^3 \underline{D}_d^k [u_d]_j^k + \sum_{f=1}^4 \underline{L}_f^k [S_{p1}]_j^k = 0 \\ \rho^k d_t [u_d]_j^k + \underline{D}_d^k [P_j^k] + \sum_{f=1}^4 \underline{L}_f^k [S_{u1}]_j^k = 0, \quad d=1,2,3 \end{cases}$$

26

Une méthode d'EF discontinus — Schéma semi-discret

Amélioration (2) du schéma semi-discret

On calcule \underline{D}_d^k et \underline{L}_f^k pour D^k sur base des mat. \underline{D}_d et \underline{L}_f de l'elem. de ref. $\hat{\Omega}$

$$\begin{aligned} \underline{D}_d^k &= \sum_{e=1}^3 g_{de}^k \underline{D}_e \quad \text{matrice de ref.} \\ \underline{L}_f^k &= \underline{F}_f^k \underline{L}_f \end{aligned}$$

→ facteurs géométriques pour passer de l'élément de ref. $\hat{\Omega}$ à D^k .

Schéma semi-discret final

$$\begin{cases} d_t [P_j^k] + \rho^k (c^k)^2 \sum_{d=1}^3 \sum_{e=1}^3 g_{de}^k \underline{D}_e [u_d]_j^k + \sum_{f=1}^4 \underline{F}_f^k \underline{L}_f [S_{p1}]_j^k = 0 \\ \rho^k d_t [u_d]_j^k + \sum_{e=1}^3 g_{de}^k \underline{D}_e [P_j^k] + \sum_{f=1}^4 \underline{F}_f^k \underline{L}_f [S_{u1}]_j^k = 0, \quad d=1,2,3 \end{cases}$$

termes
inertiels

termes
de VOLUME

termes
de SURFACE

ce terme correspond à un gradient

ce terme correspond à une divergence

27

Représentation de la solution numérique

Une méthode d'éléments finis continus

Une méthode d'éléments finis discontinus

Problème de départ et formulation variationnelle

Schéma semi-discret en espace

Schéma discret en temps et en espace

Une méthode d'EF discontinus — Schéma discret complet

Ré-écriture abstraite du système

$$\begin{aligned} d_t [P_j^k] + \nu^k (c_j^k)^2 \sum_{d=1}^3 \sum_{e=1}^3 g_{de}^k D_e [u_{d,j}^k] + \sum_{f=1}^4 F_f^k \mathbb{L}_f [S_{d,j}^k] &= 0 \\ \nu^k d_t [u_{d,j}^k] + \sum_{e=1}^3 g_{de}^k D_e [P_j^k] + \sum_{f=1}^4 F_f^k \mathbb{L}_f [S_{d,j}^k] &= 0, \quad d=1,2,3 \end{aligned}$$

$$\rightarrow d_t \begin{bmatrix} [P_j^k] \\ [u_{1,j}^k] \\ [u_{2,j}^k] \\ [u_{3,j}^k] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\nu^k (c_j^k)^2 \sum_d \sum_e g_{de}^k D_e [u_{d,j}^k] - \sum_f F_f^k \mathbb{L}_f [S_{d,j}^k] \\ -\nu^k \sum_e g_{de}^k D_e [P_j^k] - \nu^k \sum_f F_f^k \mathbb{L}_f [S_{d,j}^k] \\ -\nu^k \sum_e g_{de}^k D_e [P_j^k] - \nu^k \sum_f F_f^k \mathbb{L}_f [S_{d,j}^k] \\ -\nu^k \sum_e g_{de}^k D_e [P_j^k] - \nu^k \sum_f F_f^k \mathbb{L}_f [S_{d,j}^k] \end{bmatrix}$$

q^k rhs^k (Right-hand-side term)

$$\rightarrow d_t q^k = rhs^k$$

On résout ce système en utilisant un schéma temporel classique
ex: Euler, Adams-Bashforth, Runge-Kutta ...

29

Une méthode d'EF discontinus — Schéma discret complet

$$d_t q^k = rhs^k$$

– Schéma d'Euler explicite

$$\begin{aligned} q^{k,m+1} - q^{k,m} &= rhs^{k,m} \quad \text{indice "temps"} \\ (\Delta t) & \text{ pas temporel} \end{aligned}$$

Right-hand-side term calculé en utilisant $q^{k,m}$

$$\sim q^{k,m+1} = q^{k,m} + \Delta t rhs^{k,m}$$

– Schéma de Runge-Kutta 44 (4 niveaux - erreur $\mathcal{O}(\Delta t^4)$)

$$q^{k,m+1} = q^{k,m} + \Delta t \sum_{n=0}^3 b_n rhs^{k,m+n/4}$$

avec $\tilde{q}^{k,m+\alpha/4} = q^{k,m} + \Delta t \sum_{n=0}^{\alpha} a_{n\alpha} rhs^{k,m+n/4}$ $\alpha=1,2,3$
 $rhs^{k,m+\alpha/4}$ (calculé en utilisant $\tilde{q}^{k,m+\alpha/4}$)

30

Une méthode d'EF discontinus — Schéma discret complet

$$d_t q^k = rhs^k$$

– Schéma de Runge-Kutta "Low-storage" 54 (5 niveaux - erreur $\mathcal{O}(\Delta t^4)$)

$$\begin{aligned} q^{k,m+1} &= \tilde{q}^{k,m+1} \\ \text{avec } \tilde{q}^{k,m+(n+1)/5} &= \tilde{q}^{k,m+n/5} + b_n res^{k,m+(n+1)/5} \\ res^{k,m+(n+1)/5} &= a_n res^{k,m+n/5} + \Delta t rhs^{k,m+n/5} \quad n=0,1,2,3,4 \\ rhs^{k,m+n/5} & \text{ (calculé en utilisant } \tilde{q}^{k,m+n/5} \text{)} \end{aligned}$$

(note: $a_0 = 0$)

31

Une méthode d'EF discontinus — Schéma discret complet

$$d_t q^k = rhs^k$$

– Schéma de Runge-Kutta "Low-storage" 54

Initialisation: $q^{k,0}$ (temps $t=0$) $\forall k$.

FOR $m=0, \dots$

FOR $n=0, 1, 2, 3, 4$

calcul de $rhs^{k,m+n/5}$ en utilisant $q^{k,m+n/5}$ $\forall k$

$res^{k,m+(n+1)/5} = a_n res^{k,m+n/5} + \Delta t rhs^{k,m+n/5}$ $\forall k$

$q^{k,m+(n+1)/5} = q^{k,m+n/5} + b_n res^{k,m+(n+1)/5}$ $\forall k$

END

END

↳ boucle intérieure: itérations sur 5 niveaux

↳ boucle extérieure: itérations sur les pas de temps

32